

## 円柱ポテンシャル流れの後流吹出し吸込みモデル (ブロッケージ比の影響)

草壁 勲\* 吉田 喜美\* 井崎 陽生\*\*

A Wake Source and Sink Model  
for Circular Cylinder Potential Flow  
(A Effect of Blockage Ratio)

Isao ASHINO, Kiyoshi YOSHIDA and Haruo IZAKI

(Received Jan. 10. 1979)

Authors performed the visualized flow experiments around a circular cylinder and investigated the effect of a blockage ratio. And, we assumed the model which sets source and sink in a wake and analyzed the flow about small blockage ratio.

Consequently, pretty satisfying results were obtained.

### 1 緒 言

著者らは無限流体中に置かれた円柱まわりのポテンシャル流れについて、流れの可視化実験より後流中に吹出し、および吸込みを置くモデルを提案した。<sup>(1)</sup> この解析によって得られた流れのパターンや円柱まわりの圧力分布等はRoshko らの実験結果とよく一致することがわかった。本報告においては、ブロッケージ比が比較的小さい場合について、前報告と同様な立場から解析を試みた。その結果、Achenbach の実験結果<sup>(2)</sup>とかなりよく一致した。また、桧和田ら<sup>(4)</sup>の実験結果を用いて検討した。

### 2 理論解析

図1のような幅 $\ell$ の通路内を流体が一樣速度 $V$ で流れている場合を考える。原点に強さ $\mu$ の二重吹出し(軸の方向は $-x$ 方向)を置いたときの複素ポテンシャルは、鏡像の原理によって

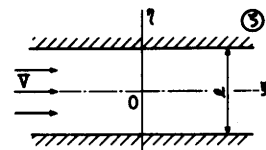


図1 流路

次式で与えられる<sup>(3)</sup>

$$F_1(\zeta) = V\zeta + \epsilon\mu \coth(\epsilon\zeta) \dots\dots\dots (1)$$

ここに  $\epsilon = \pi/\ell$  である。

いま  $\mu = V$  とおくと流れ関数  $\psi$  は

$$\psi = V \left[ \eta - \frac{\epsilon \sin(2\epsilon\eta)}{\cosh(2\epsilon\xi) - \cos(2\epsilon\eta)} \right] \dots\dots\dots (2)$$

$\epsilon$  が十分小さいとき,  $\psi = 0$  の流線を求めると,

$$\left. \begin{aligned} \eta &= 0 \\ \xi^2 + \eta^2 &= 1 - \epsilon^2/3 + O(\epsilon^4) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

すなわち,  $\epsilon$  が小さいとき, 式(1)の流れは,

$$r = \sqrt{1 - \epsilon^2/3} = 1 - \epsilon^2/6 \approx 1 \dots\dots\dots (4)$$

の円のまわりの流れを表わす( $r$  は円柱の半径)。次に  $\xi = a$  に強さ  $Q$  の吹出しを置いたときの複素ポテンシャルは, 鏡像の原理によって次式で与えられる。

$$f(\zeta) = Q \ln \sinh\{\epsilon(\zeta - a)\} \dots\dots\dots (5)$$

それゆえ半径  $r$  の円柱後方  $\xi = a(a > 1)$  に強さ  $Q$  の吹出しを置いたときの複素ポテンシャル  $F_2(\zeta)$  は鏡像の原理によって近似的に次式で与えられる。

$$F_2(\zeta) = Q[\ln \sinh\{\epsilon(\zeta - a)\} + \ln \sinh\{\epsilon(\zeta - r^2/a)\} - \ln \sinh(\epsilon\zeta)] \dots\dots\dots (6)$$

また,  $\xi = b$  に強さ  $Q$  の吸込みを置いたときの複素ポテンシャル  $F_3(\zeta)$  は同様に

$$F_3(\zeta) = -Q[\ln \sinh\{\epsilon(\zeta - b)\} + \ln \sinh\{\epsilon(\zeta - r^2/b)\} - \ln \sinh(\epsilon\zeta)] \dots\dots\dots (7)$$

よって図2のような流路内の流れの複素ポテンシャル  $F(\zeta)$  は

$$F(\zeta) = F_1(\zeta) + F_2(\zeta) + F_3(\zeta) \dots\dots\dots (8)$$

で与えられる。複素速度は上式を  $\zeta$  で微分すると求められる。

すなわち,

$$W_1(\zeta) = dF_1/d\zeta = V[1 - 2\epsilon^2/(\cosh(2\epsilon\zeta) - 1)]$$

$$W_2(\zeta) = dF_2/d\zeta = \epsilon Q \left\{ \coth\{\epsilon(\zeta - a)\} + \coth\{\epsilon(\zeta - r^2/a)\} - \coth(\epsilon\zeta) \right\}$$

$$W_3(\zeta) = dF_3/d\zeta = -\epsilon Q \left\{ \coth\{\epsilon(\zeta - b)\} + \coth\{\epsilon(\zeta - r^2/b)\} - \coth(\epsilon\zeta) \right\}$$

$$W(\zeta) = W_1(\zeta) + W_2(\zeta) + W_3(\zeta)$$

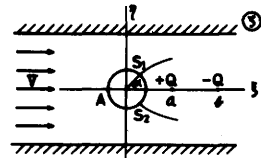


図2 円柱後方に吹出しおよび吸込みのある流れ

半径  $r$  の円柱表面上の速度の大きさは,  $\xi = r \cos \theta$ ,  $\eta = r \sin \theta$  とおくと  $\epsilon$  が小さいとき,

$$\left. \begin{aligned} |W_1(\zeta)| &\approx 2V(1 + \epsilon^2/3) \sin \theta + O(\epsilon^4) \\ |W_2(\zeta)| &\approx Q \sin \theta / r (\rho - \cos \theta) + O(\epsilon^2) \\ |W_3(\zeta)| &\approx Q \sin \theta / r (\tau - \cos \theta) + O(\epsilon^2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

ここに

$$\rho = (a^2 + 1)/2a, \quad \tau = (b^2 + 1)/2b \dots\dots\dots (11)$$

円柱表面上の点  $S_1$ ,  $S_2$  で流れがはく離すると仮定すれば,  $\theta = \pm \alpha$  で速度は0である。すなわち,

$$2(1 + \epsilon^2/3)V = Q[1/r(\rho - \cos \alpha) - 1/r(\tau - \cos \alpha)]$$

よって

$$Q = 2(1 + \epsilon^2/3) V r (\rho - \cos \alpha)(\tau - \cos \alpha) / (\tau - \rho) \quad (12)$$

吹出し強さ $Q$ は上式によって定まる。すなわち、はく離角 $\alpha$ 、吹出し位置 $a$ および吸込み位置 $b$ がきまれば、吹出し強さ $Q$ が定められる。これを用いて円柱表面の複素速度を表わすと、式(9)および(12)より

$$W(\zeta) = -i e^{-i\theta} 2(1 + \frac{\epsilon^2}{3}) V \sin \theta \frac{(\cos \theta - \cos \alpha)(\tau + \rho - \cos \alpha - \cos \theta)}{(\rho - \cos \theta)(\tau - \cos \theta)} \quad (13)$$

次に写像関数

$$Z = (\zeta - \cos \alpha) - \sin^2 \alpha / (\zeta - \cos \alpha) \quad (14)$$

で、②面の流れを②面へ写す。②面の半径 $r$ の円周は、②面では円弧(半径 $R = r \sec \alpha$ ) $S_1 A S_2$ に写像される。また平行壁面 $\eta = \pm i l / 2$ は式(14)より $y \approx \pm i l / 2$ となり、②面でもほぼ平行壁面となる。それゆえ円弧 $S_1 A S_2$ を半径 $R$ の円柱で置きかえれば、速度 $U$ の一樣流れ中に置かれた円柱のまわりの流れを与え、点 $S_1, S_2$ ではく離する流れを与えることになる。前縁 $A$ より測った角を $\beta$ 、はく離角を $\beta_s$ とすると、式(14)より次式を得る。

$$\sin \beta = \sin \theta (1 - \cos \alpha \cos \theta) / (m - \cos \theta) \quad (15)$$

ここに

$$m = (1 + \cos^2 \alpha) / 2 \cos \alpha \quad (16)$$

$\theta = \alpha$ のときには

$$\beta_s = \pi - 2\alpha \quad \text{あるいは} \quad \alpha = (\pi - \beta_s) / 2 \quad (17)$$

②面における複素速度は次式によって与えられる。

$$W(z) = W(\zeta) d\zeta / dz \quad (18)$$

無限遠においては $|d\zeta/dz| \rightarrow 1$ であるから、 $U = V$ で、これを用いて式(13)および(15)より円柱表面上の速度の大きさを求めると次式を得る。

$$\frac{|W(z)|}{U} = 2(1 + \frac{\epsilon^2}{3}) \cos \alpha \sin \theta (\frac{m - \cos \theta}{\rho - \cos \theta}) (1 + \frac{\rho - \cos \alpha}{\tau - \cos \theta}) \quad (19)$$

②面で円柱表面上の速度の最大値は、ほぼ $\theta \approx \pi/2$ の位置と考えられる。それゆえ式(19)より $m \approx \rho$ なる関係を得る。これを用いると式(19)は

$$\frac{|W(z)|}{U} \approx 2(1 + \frac{\epsilon^2}{3}) \cos \alpha \sin \theta (1 + \frac{m - \cos \alpha}{\tau - \cos \theta}) \quad (20)$$

②面で前縁 $A$ より測った角を $\phi (= \pi - \theta)$ とし、これを用いると②面の円柱表面上の速度の大きさと角 $\beta$ との関係は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{|W(z)|}{U} &\approx 2(1 + \frac{\epsilon^2}{3}) \cos \alpha \sin \phi (1 + \frac{m - \cos \alpha}{\tau + \cos \phi}) \\ \sin \beta &= \sin \phi (1 + \cos \alpha \cos \phi) / (m + \cos \phi) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

また円柱表面の圧力係数 $C_p$ は次式で与えられる。

$$C_p = 1 - \{|W(z)|/U\}^2 \quad (22)$$

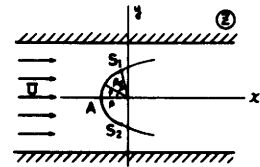


図3 ②面へ写像した流れ

圧力係数  $C_p$  の最小値  $C_{p \min}$  を与える角  $\beta = \beta_1$  が実験的に求められれば、角  $\alpha_1$ ,  $m$  および  $\tau$  は次のようにして求められる。

円柱表面上の速度の最大値は  $\theta = \pi/2$  すなわち  $\beta = \pi/2$  である。式(2)第2式より

$$\sin \beta_1 = 1/m \quad \text{すなわち} \quad m = 1/\sin \beta_1 \quad \dots\dots\dots (23)$$

式(2)より  $\cos \alpha$  が求められる。また式(2)第1式および式(2)より

$$\begin{aligned} [ |W(z)|/U ]_{\max} &= 2(1+\varepsilon^2/3) \cos \alpha \{ 1 + (m - \cos \alpha)/\tau \} \\ &= \sqrt{1 - C_{p \min}} \quad \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

式(23), (24)より  $\alpha$ ,  $m$ ,  $\tau$  が求められる。

次に流線は式(8)の虚数部  $\text{Im}[F(\zeta)] = \text{const.}$  を式(24)によって②面に移せば求めることができる。

### 3 数値計算および考察

Achenbach の実験値を用いて解析した結果を表1ならびに図4(a), (b), (c)に示した。プロジェクティビティ  $d/l = 1/6$ ,  $\varepsilon = 0.2618$  である。図4(a), (b)で  $C_{p \min}$  は全体の傾向を一致させるため、少し大きめに選んである。本理論と背圧  $C_{pb}$

との交点より推定したはく離角  $\beta_s$  は実験値と大体一致している。 $Re$  数が増加すると、吹出し位置  $a$  は円柱に近づくが、吸込み位置  $b$  は、はっきりした傾向は分からない。しかし、本理論のモデルでは圧力係数につ

表1 Achenbach の実験値と解析結果との比較

$Re$	$\beta_s$	$a$	$b$	$\beta_s^*$
$1.0 \times 10^5$	$78^\circ$	1.570	3.342	$78.5^\circ$
$2.6 \times 10^5$	$94^\circ$	1.046	2.887	$94^\circ$
$3.6 \times 10^5$	$115^\circ$	1.015	5.262	$110^\circ$

\*  $C_{pb}$  との交点より求めた値

いて実験結果とかなりよく一致しているのが分かる。  
次に同一  $Re$  数のとき、プロジェクティビティ  $d/l$  による変化をみるた

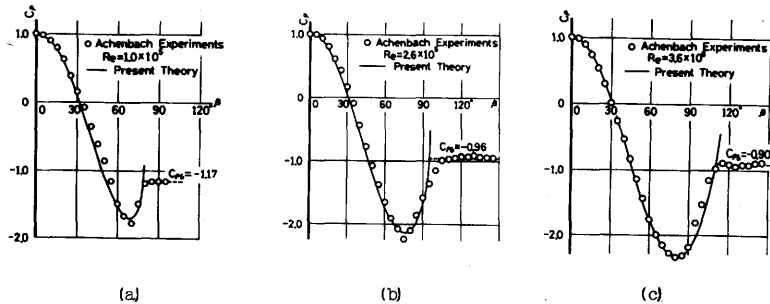
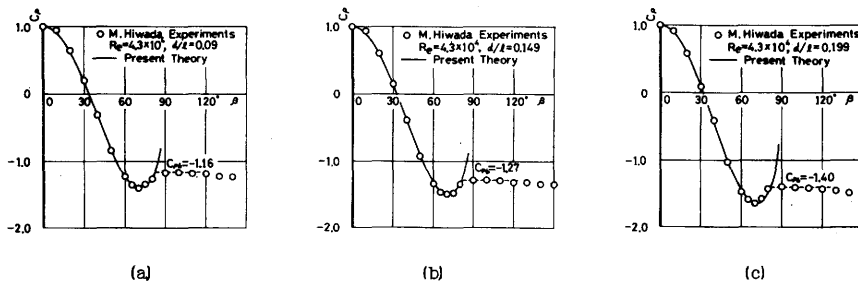


図4 Achenbach の実験値と著者の解析との比較



めに、桧和田ら<sup>(4)</sup>の実験結果を用いて解析した結果を図5(a)~(g)ならびに表2および図6に示す。圧力係数 $C_p$ の実験値と本理論の解析結果とが極めてよく一致しているのが分かる。

図6は表2の $d/\ell$ と $a$ および $b$ の関係を表したもので、吹出し位置 $a$ は一定であるが、吸込み位置 $b$ は $d/\ell$ の増加とともに $a$ に漸近することがわかる。

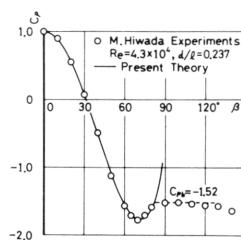
図7は $Re = 500$ ， $d/\ell = 1/6$ における円柱まわりの流線と後流領域の流れを可視化したもので、円柱が動き始めてから60秒後にシャッターを60秒間開放して撮影した。比較するため式(8)による流線の計算結果を点線で示した。式(8)による流線は①面の流線であり、式(4)を用いて更に②面に移したもので、 $\psi = 0$ ，

0.325，0.649，

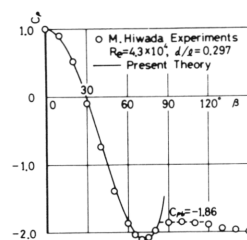
1.299および3.247

について描いてある。

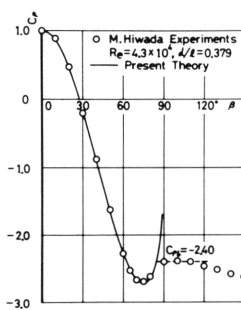
実験による流線と理論流線の傾向はかなりよく似ているのがわかり、本理論のモデルが妥当であることを示している。



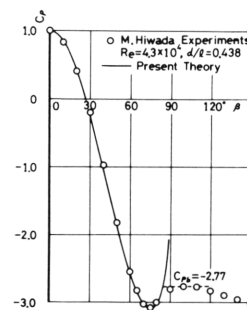
(d)



(e)



(f)



(g)

図5 桧和田らの実験値と著者の解析との比較

表2  $d/\ell$  と  $\beta_s$ ,  $a$ ,  $b$  の関係

$d/\ell$	$\beta_s$	$a$	$b$
0.090	82°	1.428	7.221
0.149	81°	1.428	6.637
0.199	81.5°	1.428	5.692
0.237	82°	1.428	5.110
0.297	82.5°	1.428	3.907
0.379	84°	1.428	2.909
0.438	84.5°	1.428	2.677

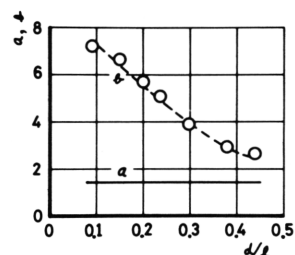


図6  $d/\ell$  と  $\beta_s$ ,  $a$ ,  $b$  の関係

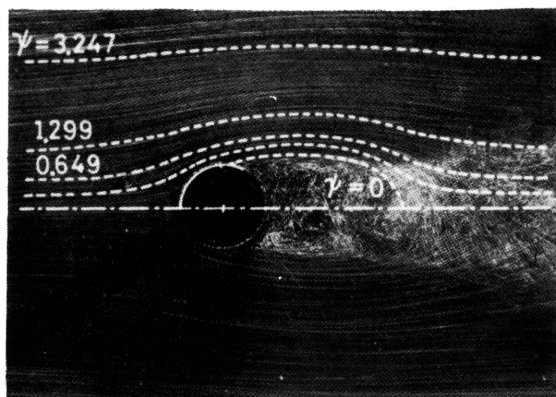


図7 理論流線と実験流線の比較 ( $Re = 500$ ， $d/\ell = 1/6$ )

#### 4 結 論

流れの可視化実験より，ブロッケージ比が比較的小さい円柱まわりのポテンシャル流れについて後流中に吹出しおよび吸込みを置くモデルを想定し解析を行った。その結果、

- (1) 本理論のモデルによる圧力係数  $C_p$  を他の実験者の結果と比較するとよく一致することが明らかになった。
- (2) 実験による流線と理論流線の傾向はかなりよく似ていることがわかった。
- (3) 同一  $Re$  数においては吹出し位置は変化せず，吸込み位置は  $d/\ell$  の増加とともに吹出し位置に漸近することが明らかになった。

#### 参 考 文 献

1. 葦埜・吉田，日本機械学会流体工学講演論文集 第 901 回（1978. 8）
2. Achenbach, M., J. Fluid Mech. ( 1968 ) 34 - 625
3. Lam, Hydrodynamics, P71 ( 1932 )
4. 桧和田，外 3 名，日本機械学会論文集，42 - 360 ( 1976 )，2481